Chapter 1 逻辑与证明

逻辑

作用：评估一个逻辑论证是否合法。

特点：不依存于真实情况，只依存给定命题。

命题

定义：一个命题具有判定性的句子格式，取值只能为真或假，由于其唯一性不能二者均取。由于条件的改变，命题在不同情况下的取值可能是不同的，但针对特定情况有确定的取值。

分类：原子命题/复杂命题（由连词连接）

实例：”China is a country”是命题，””不是命题

命题公式（复合命题）

-组成部分：

* 命题常数（Propositional Constant）：某个确定的命题。
* 命题变量（Propositional Variable）：表示命题的变量，当该变量被命题替换时，其真值为定值。

-定义：

1. 命题常数和命题变量均为复合命题
2. 对于命题，使用连词连接可以将其构成复合命题

-对于复合命题，当为其中一部分且同样为复合命题时，为的子命题。

-阶数（Level）定义方法：

* 原子命题为0阶
* 对，且为阶命题，
* 对连词连接的，阶数为

连词

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 符号 | |  |  |  |  |  |
| 名称 | | 否定 | 合取 | 析取 | 推理 | 等价 |
| 判定 | | 为真，当且仅当为假 | 为真，当且仅当均为真 | 为真，当且仅当中存在真命题 | 为假，当且仅当为真且为假 | 为真，当且仅当与的取值相等 |
| 真值表 | | | | | | |
|  |  |  |  |  |  |  |
| T | T | F | T | T | T | T |
| T | F | F | T | F | F |
| F | T | T | F | T | T | F |
| F | F | F | F | T | T |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 基于推理的衍生概念 | | | |
| 原命题 | **逆命题** | **否命题** | **逆否命题** |
|  |  |  |  |

真值

真值赋值：将命题变量赋值为命题常数，对于具有个不同变量的命题，共有种不同的赋值方法（每个变量可以取真值为）。

1. 真值表（列举命题的所有赋值）构造步骤：
2. 对所有个变量列举取值
3. 列举基于命题的所有阶数子命题
4. 计算每个子命题的真值

依据真值的公式分类：

重言式（Tautology）：对于任何赋值，命题恒真。

矛盾式（Contradiction）：对于任何赋值，命题恒假。

可满足公式（Satisfiable formula）：存在某个赋值，命题为真。

逻辑等价公式（参考wiki）

双重否定律（Double negation law）:

德摩根律（De Morgan’s laws）: 1) 2)

幂等律（Idempotent laws）: 1) 2)

交换律（Commutative laws）: 1) 2) 3)

结合律（Associative laws）

分配律（Distributive laws）: 1)

2)

吸收律（Absorption laws）: 1) 2)

支配律（Domination laws）: 1) 2)

恒等律（Identity laws）: 1) 2)

否定律（Negation laws）: 1) 2)

包括蕴涵的逻辑等价公式

实质蕴涵（Material implication）:

实质等价（Material equivalence）: 1) 2)

逆否命题（Contraposition）:

归谬法（Reduction to absurdity law）:

逻辑计算

Clause: 析取式（）

Term: 合取式（）

析取范式（DNF）：对有限个合取式，为析取范式。

合取范式（CNF）：对有限个析取式，为合取范式。

存在性定理：任何逻辑公式都可以被表示为析取或合取范式的形式。

论证（Argument，由一串命题组成）

前提（Premises）：论证过程中除结论外的命题

结论（Conclusion）：最终得出的命题

有效论证：当论证前提为真时，结论为真的论证。

有效论证模式（Valid argument form）：命题变量被任意命题替代后仍保持其可推理性，即前提为真时结论依然为真。

语义蕴含（Semantic Implication）：给定命题，当且仅当在任意真值赋值下都满足，同时被称为有效结论。因此，为真当且仅当为重言式。

自然演绎法（Natural deduction）：使用推理规则证明的方法。

逻辑蕴含（Logic entailment）：当且仅当可通过应用一系列推理规则从推导而来。

自然演绎系统组成成分：1) 复合命题 2) 演绎规则系统（前提引入、替换规则、推理规则）

推理规则

附加（Addition）:

简化（Simplification）:

合取（Conjunction）:   
消减（Resolution）:

拒取式（Modus Ponens）:

否定式（Modus Tollens）:

假言三段论（Hypothetical Syllogism）:

析取三段论（Disjunctive Syllogism）:

证明（证明定理为真的有效论证）

定理：一个可以证明为真的陈述。

命题：非重要定理的统称。

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 证明类别 | 直接证明 | 非直接证明 | |
| 证明方法 | 直接证明 | 对位证明  Contraposition | 对立证明（反证）  Contradiction |
| 证明对象 |  |  |  |

**Soundness**() means that you cannot prove anything that's wrong.

**Completeness**() means that you can prove anything that's right.

命题逻辑的缺点：无法表示复杂关系以及量词

谓词逻辑

特性：

1. 拆解命题（分解出个体和谓词，谓词用于修饰个体属性）
2. 允许对象之间的关系推理

个体：可以为常数或变量，在定义域（UoD/Domain）中取值。

谓词：描述个体属性或个体之间关系，元谓词描述含有个个体的关系属性。

量词：表示满足谓词的元素范围

全称量词（Universal quantifier，）：定义域中的每个元素

存在量词（Existential quantifier, ）：定义域中的某个元素

函数用小写，谓词用大写。

复合公式由元谓词（原子公式）通过有限个连词组合而成。原子公式的格式为，原子公式的变量只能为术语（常数、变量、函数），原子公式之间不能嵌套。

对一个语句进行表示：给定非空定义域，每个都可以被映射为中的某个个体；每个元函数都可以被映射为中的某个元函数，每个元谓词都可以被映射为中的某个元关系。

模型：

假设是关于封闭公式的模型（），则有：

和前述的推理规则相似，模型本身需要自洽。

量词等价操作

量词的移除（Removal of quantifiers）：

在有限定义域上，

量词的否定（Negation of formulas with quantifiers）：

对于自由变量，

对于中的自由变量：

在上不受约束，故可以不写入量词约束范围内。

对于中的自由变量：

注意命题变量约束的展开与变量和连词有关，除以上三种展开方式外，其他操作都不等价。

变量名称替代时，不可使用谓词内出现过的其他变量名。

前束范式（PNF）：量词约束全部前置，格式为，其中，为不含任何量词的谓词。

前束合取范式（PCNF）：与前束范式类似，结合合取范式规则，格式为。

前束范式存在定理：

前束范式的转换步骤：

1. 使用替代
2. 将置于原子公式前
3. 进行命名替换，将量词前置

谓词逻辑下的推理规则

全称实例化（Rules of universal instantiation，UI，）：

全称普遍化（Rule of universal generalization，UG，）：

对存在量词的规则（Rules for existential quantifier，）：